

Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

1.) Definitionsbereich

$$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 3 \quad \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; +3\}$$

2.) Symmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-x^3}{x^2 - 9} \neq f(x) \quad \Rightarrow \text{keine Achsensymmetrie zur y-Achse}$$

$$f(-x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-x^3}{x^2 - 9} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 9} = -f(x) \quad \Rightarrow \text{Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

3.) Polstellen

$$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 3 \quad \Rightarrow \text{Polstelle bei } x = -3 \text{ und } x = +3$$

Polstelle: -3:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -3 \quad x \rightarrow -3$$

$$x < -3 \quad x > -3$$

Polstelle: +3:

$$\lim_{x \rightarrow +3} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +3} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +3 \quad x \rightarrow +3$$

$$x < 3 \quad x > 3$$

4. Schräge Asymptote

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} x^3 : (x^2 - 9) &= \frac{1}{6} x + \frac{\frac{3}{2} x}{x^2 - 9} \\ \hline &= \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x \end{aligned}$$

Schräge Asymptote bei $y = \frac{1}{6} x$

5. Nullstellen: $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 9} = 0$

$\Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow N(0|0)$

6. Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 9) - (x^3 \cdot (2x))}{(x^2 - 9)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3x^4 - 27x^2 - 2x^4}{(x^2 - 9)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(4x^3 - 54x) \cdot (x^2 - 9)^2 - [(x^4 - 27x^2) \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x]}{(x^2 - 9)^4} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(4x^3 - 54x) \cdot (x^2 - 9) - [(x^4 - 27x^2) \cdot 4x]}{(x^2 - 9)^3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4x^5 - 36x^3 - 54x^3 + 486x - 4x^5 - 108x^3}{(x^2 - 9)^3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{18x^3 + 486x}{(x^2 - 9)^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{18(x^3 + 27x)}{(x^2 - 9)^3} \\ &= \frac{18}{6} \cdot \frac{(x^3 + 27x)}{(x^2 - 9)^3} \end{aligned}$$

Zwei Ableitungen genügen. Statt der 3. Ableitungen arbeiten wir mit dem Vorzeichenwechselkriterium.

7. Extremstellen

$$f'(x) = 0$$

Es genügt den Zähler gleich Null zu setzen:

$$x^4 - 27x^2 = 0$$

$$x^2 (x^2 - 27) = 0$$

1. Fall: $x^2 = 0$ bzw. $x_1 = 0$

2. Fall: $x^2 - 27 = 0$

$$x^2 = 27$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{27} = \pm\sqrt{9 \cdot 3} = \pm 3\sqrt{3}$$

(Achtung: Überprüfen, ob die Stellen im Definitionsbereich liegen!)

Art der Extremstelle:

$$f''(0) = 3 \cdot \frac{(0^3 + 27 \cdot 0)}{(0^2 - 9)^3} = \frac{18}{6} \cdot \frac{0}{(-9)^3} = 0 \Rightarrow \text{Kein Extrempunkt}$$

$$f''(3\sqrt{3}) = 3 \cdot \frac{(3\sqrt{3})^3 + 27 \cdot 3\sqrt{3}}{((3\sqrt{3})^2 - 9)^3} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(-3\sqrt{3}) = 3 \cdot \frac{(-3\sqrt{3})^3 + 27 \cdot (-3\sqrt{3})}{((-3\sqrt{3})^2 - 9)^3} = 3 \cdot \frac{-((3\sqrt{3})^3 + 27 \cdot (3\sqrt{3}))}{((3\sqrt{3})^2 - 9)^3} = -3 \cdot \frac{(3\sqrt{3})^3 + 27 \cdot (3\sqrt{3})}{((3\sqrt{3})^2 - 9)^3} < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt

y- Werte:

$$f(3\sqrt{3}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3\sqrt{3})^3}{(3\sqrt{3})^2 - 9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3^3 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}}{3^2 \sqrt{3}^2 - 9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{27 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot 3 - 9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{27 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{18} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

Wegen Punktsymmetrie gilt:

$$f(-3\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$TP(3\sqrt{3} | \frac{3}{4}\sqrt{3})$$

$$HP(-3\sqrt{3} | -\frac{3}{4}\sqrt{3})$$

8. Wendestellen

$f''(x) = 0$ Auch hier genügt es, nur den Zähler zu betrachten

$$x^3 + 27x = 0$$

$$x(x^2 + 27) = 0 \Rightarrow$$

1. Fall: $x_1 = 0$
2. Fall: $x^2 + 27 = 0 \mid -27$

$$x^2 = -27$$

$$IL = \{\}$$

Für x Werte nahe bei 0 mit $x > 0$: $f''(x) < 0$

Für x Werte nahe bei 0 mit $x < 0$: $f''(x) > 0$

=>VZW => Daher Wendestelle bei x = 0

y- Werte:

$$f(0) = 0$$

$$WP(0|0)$$

9. Graph

